201	Etude de suites numériques définies par différents types de récurrence. Applications.	Théorème du point fixe. Application.	Capes Sorosina

*Ce théorème est souvent mentionné comme **Théorème du point fixe de Banach** (1), qui l'a énoncé en 1922 dans le cadre de la résolution d'équations intégrales (Une **équation intégrale** est une équation dont l'une des indéterminées est une intégrale).*
Ce résultat donne un algorithme de calcul du point fixe (c'est la méthode des approximations successives) contrairement à d'autres théorèmes de point fixe qui nous assurent seulement de l'existence de points fixes sans indiquer comment les déterminer. De plus en utilisant la continuité de la distance d, *on obtient (sans connaître exactement* x * *) un majorant (souvent "pessimiste") de l'erreur:* $d\left(x^*, x_n\right) \leq \frac{k^n}{1-k} d\left(x_1, x_0\right)$.

Applications:
Résolution d'équations numériques, voir notamment méthode de Newton.
Résolution approchée de systèmes linéaires par itération
Résolution d'équations différentielles : théorème de Cauchy-Lipschitz
Théorème des fonctions implicites

Prop.3:(CAPES)Soit I un intervalle fermé non vide de ℝ et $f : I \rightarrow I$ contractante.
1. f admet un unique point fixe.
2. $\forall u_0 \in I$, la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par u_0
et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f\left(u_n\right)$ converge vers le point fixe de f

Exemple 3 (SOR) $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*} : \begin{cases} u_0 = a \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \dfrac{\arctan\left(u_n\right)}{4+\cos\left(u_n\right)} \end{cases} \xrightarrow{CV} 0$

I. Outils

*ℝ est **complet**: un espace métrique est dit complet ou espace complet si **toute suite de Cauchy converge**. La propriété de complétude dépend de la distance. Intuitivement, un espace est complet s'il « n'a pas de trou », s'il « n'a aucun point manquant ».*

*Définition séquentielle d'un **fermé**: Une partie A d'un espace métrique X est dite fermée si la limite de toute suite cv de A appartient à A.*

II. Démonstration du théorème (Capes p.74).

1) Montrons que la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de **Cauchy**. Comme ℝ est complet, elle convergera alors dans ℝ.

On a: ∀p∈ℕ*, $\left|u_{p+1}-u_p\right| = \left|f\left(u_p\right)-f\left(u_{p-1}\right)\right| \leq k\left|u_p-u_{p-1}\right|$.

On montre donc par récurrence que: ∀p∈ℕ*, $\left|u_p-u_{p-1}\right| \leq k^{p-1}\left|u_1-u_0\right|$.

Il vient, pour tous p∈ℕ, r∈ℕ* :

$$\left|u_{p+r}-u_p\right| \leq \left|u_{p+r}-u_{p+r-1}\right| + \left|u_{p+r-1}-u_{p+r-2}\right| + \ldots + \left|u_{p+1}-u_p\right|$$
$$\leq \left(k^{p+r-1}+k^{p+r-2}+\ldots+k^p\right)\left|u_1-u_0\right|$$
$$\leq k^p \frac{1-k^r}{1-k}\left|u_1-u_0\right| \leq \frac{k^p}{1-k}\left|u_1-u_0\right|$$

Or $k \in [0,1[$, d'où $\lim\limits_{p\to\infty} \frac{k^p}{1-k}\left|u_1-u_0\right| = 0$.

→Soit ε>0. ∃N∈ℕ tq. ∀p∈ℕ, $\left(p \geq N \Rightarrow \frac{k^p}{1-k}\left|u_1-u_0\right| \leq \varepsilon\right)$. D'où ∀(p,r)∈ℕ×ℕ*, $\left(p \geq N \Rightarrow \left|u_{p+r}-u_p\right| \leq \varepsilon\right)$.

Donc la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc converge dans ℝ.

2) Montrons que sa limite est un point fixe de f.

Soit l la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a défini $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans I fermé, donc (d'après la def. séquentielle d'un fermé), sa limite l∈I.

Or ∀n∈ℕ, $|u_{n+1} - f(l)| \le k|u_n - l|$; donc en faisant tendre n→∞, il vient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \to f(l)$.

Donc, par unicité de la limite, $f(l) = l$, et l est bien un point fixe de f.

3) Montrons l'unicité de ce point fixe.

Raisonnons par l'absurde en en supposanr deux. Soient x_1 et x_2 deux points fixes de f.

On a: $|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1 - x_2| \le k|x_1 - x_2|$, avec k∈[0,1[. D'où k=0, et $|x_1 - x_2| \le 0$, i.e. $|x_1 - x_2| = 0$.

Donc $x_1 = x_2$, ce qui assure l'unicité du point fixe.

III. Application (Sorosina 1.11 p.17).

Exemple 3 (SOR) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} : \begin{cases} u_0 = a \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \dfrac{\arctan(u_n)}{4+\cos(u_n)} \end{cases} \xrightarrow{CV} 0$

On pose I=ℝ. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) = \dfrac{\arctan(x)}{4+\cos(x)} \end{cases}$. Vérifions que les hypothèses du **théorème du pt fixe** sont satisfaites:

i) I=ℝ est bien un fermé de ℝ. f envoie bien I dans I.

ii) Montrons que f est bien k-contractante, ie ∃k∈[0;1[tq: ∀x, y ∈I, $|f(x) - f(y)| \le k|x-y|$.

Pour cela, utilisons **l'inégalité des accroissements finis**: on majore f'.

f est C¹ sur I, et vérifie pour tout x∈I: $f'(x) = \dfrac{1}{(4+\cos x)^2}\left(\dfrac{4+\cos x}{1+x^2} + \arctan x.\sin x\right)$.

Donc pour tout x∈I, $|f'(x)| \le \dfrac{1}{9}\left(5 + \dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{10+\pi}{18} < 1$.

En posant $k = \dfrac{10+\pi}{18}$, et en appliquant **l'inégalité des accroissements finis**, on a :

f est k-contractante sur I=ℝ.

iii) Montrons que f admet un point fixe, ie que l'égalité $f(x) = x$ admet une solution sur I=ℝ.

On arctan(0)=0, donc $f(0) = 0$, et f admet un point fixe en 0.

On applique alors le théorème du point fixe:

∀nℕ, $|f(u_n) - f(l)| \le k|u_n - l|$ ie $|u_{n+1} - l| \le k|u_n - l|$, d'où par récurrence: ∀n∈ℕ, $|u_{n+1} - l| \le k^n|u_0 - l|$,

donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{CV} l = 0$

IV. Notes

(1) Le théorème du point fixe se généralise à un espace de Banach (espace vectoriel normé complet) qcq (Capes p.159):

Soient $(E, \|.\|)$ un espace de Banach,

f une application k-contractante de E dans E (i.e. ∃k, 0<k<1, ∀(x, y)∈E², $\|f(x) - f(y)\| \le k\|x-y\|$).

Alors on a le résultat suivant:

1. Il existe un unique x de E vérifiant $f(x) = x$, appelé point fixe.

2. Pour tout x_0 de E la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par x_0 et $x_{n+1} = f(x_n)$, n∈ℕ, vérifie $x = \lim_{n\to\infty}(x_n)$.